第 3 节 简单的比较指、对数大小问题（★★☆）

内容提要

比较大小是常见题型，本节解决较为基础的比大小问题，包括下面两类题型.

1．估算：通过估算数据在哪两个整数之间来比较大小. 若估算比较不出来，就寻求一个中间量再来比较. 例如，若 a 和 b 都在 $(0,1)$ 上，可把 a，b 再与 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$ 等常见中间量比较.

2．简单的构造函数比较：有时所给数据很接近，不易用上面 1 中的方法来比较大小，此时可尝试观察数据的结构特征，通过构造函数来解决问题.

典型例题

类型Ⅰ：整数级估算

【例 1】（2021·天津）已知 $a=\log_2 0.3$，$b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4$，$c=0.4^{0.3}$，则三者的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$c<a<b$　（C）$b<c<a$　（D）$a<c<b$

解析： 先进行粗略估算，判断各数据的正负，，显然 b 和 c 都大于 0，所以 a 最小，

b，c 都为正，再看看它们与 1 的大小，$b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4>\log_{\frac{1}{2}} 0.5=1$，$c=0.4^{0.3}<0.4^0=1$，所以 $a<c<b$.

答案： D

【反思】①对数判正负口诀：同正异负，“同正”指底数和真数同时大于 1 或同时小于 1，则对数为正，“异负”指底数和真数一个大于 1 一个小于 1，则对数为负；②粗略估算往往是判断各数据与 0，1 等整数的大小关系.

【变式】设 $a=\log_2 1.8$，$b=\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}$，$c=\log_3 15$，则（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$a<c<b$　（C）$b<a<c$　（D）$c<a<b$

解析： 先估计它们所在的整数区间，$0<\log_2 1.8<1$，$2=\log_3 9<\log_3 15<\log_3 27=3$，$1=\mathrm{e}^0<\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}<\mathrm{e}<3$，

通过简单的估算得到 b 在 $(1,3)$ 上，不妨再比较 b 和 2 的大小，得到更准确的范围，可作商来看，

$(\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}}{2})^5=\frac{\mathrm{e}^3}{2^5}<\frac{3^3}{2^5}=\frac{27}{32}<1\Rightarrow\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}}{2}<1\Rightarrow\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}<2$，所以 $0<a<1<b<2<c<3$.

答案： A

类型Ⅱ：选取中间量比较

【例 2】（2021·新高考Ⅱ卷）已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_8 3$，$c=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是（　　）

（A）$c<b<a$　（B）$b<a<c$　（C）$a<c<b$　（D）$a<b<c$

解析：粗略估算知a,b都在$(0,1)$上，而$c=\frac{1}{2}$，可能是中间量的提示，故把a,b和$\frac{1}{2}$比，可化同底来看，

$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}=c$，$b=\log_8 3>\log_8(2\sqrt{2})=\frac{1}{2}=c$，所以$a<c<b$.

答案：C

【变式】已知$a=\sqrt{3}$，$b=\log_2\sqrt{3}$，$c=\log_3\sqrt{2}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>b>a$

解析：粗略估算可得$a>1$，b，c都在$(0,1)$上，所以a最大，再比较b，c，当两个数据都在两相邻的整数之间时，可以先试试选两整数的中间值为中间量来比较，比如本题可选$\frac{1}{2}$，

$b=\log_2\sqrt{3}>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，$c=\log_3\sqrt{2}<\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，所以$b>c$，故$a>b>c$.

答案：A

【总结】比较大小这类题，往往先尝试把各数据估算在相邻的两个整数之间，如$(0,1)$，$(1,2)$等，看能否找出最大的一个或最小的一个，对于都在同样两个整数之间的数据，再选择与中点、三等分点等比较.

类型III：简单的构造函数比较大小

【例3】设$a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$，$c=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

（A）$c>a>b$　　（B）$c>b>a$　　（C）$a>c>b$　　（D）$a>b>c$

解析：因为a，b，c都是指数且形式结构相同，考虑构造函数，观察它们的底数和指数，可以发现a，c指数相同，可构造幂函数比较，b，c底数相同，可构造指数函数比较，

因为$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$\mathbf{R}$上↗，所以$f(\frac{1}{2})>f(\frac{1}{3})$，即$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}>(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，故$a>c$；

因为$g(x)=(\frac{1}{3})^x$在$\mathbf{R}$上↘，所以$g(\frac{1}{2})<g(\frac{1}{3})$，即$(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}<(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，故$b<c$；所以$a>c>b$.

答案：C

【例4】已知$a=\frac{\ln 3}{3}$，$b=\frac{\ln 2}{2}$，$c=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

（A）$a>c>b$　　（B）$b>c>a$　　（C）$c>a>b$　　（D）$c>b>a$

解析：a，b的结构相同，对于c，只要将其化为$\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，就能与$a$，$b$统一，故可构造函数分析，

设$f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$a=f(3)$，$b=f(2)$，$c=f(\mathrm{e})$，因为$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上↗，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↘，

自变量 3，2，e 不在同一个单调区间上，怎么办呢？那就化到同一个单调区间上去，

注意到 $b=f(2)=\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{2\ln 2}{4}=\dfrac{\ln 4}{4}=f(4)$，

又 $\mathrm{e}<3<4$，所以 $f(\mathrm{e})>f(3)>f(4)=f(2)$，故 $c>a>b$.

答案：C

【总结】①当我们发现指数、底数部分相同时，可考虑构造幂函数、指数函数，利用单调性比较大小；②若所给数据结构相同（如例 4），则可基于结构来构造函数分析.

强化训练

类型Ⅰ：估算法比较大小

1.（2023·浙江模拟·★★）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_{0.7} 2$，$c=5^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a>b>c$　（B）$a>c>b$　（C）$c>b>a$　（D）$c>a>b$

2.（2023·天津南开二模·★★）已知 $a=2^{0.2}$，$b=1-2\lg 2$，$c=2-\log_3 10$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

（A）$b>c>a$　（B）$a>b>c$　（C）$a>c>b$　（D）$b>a>c$

3.（2022·重庆模拟·★★）$a=\log_3\dfrac{1}{2}$，$b=\log_2\dfrac{1}{3}$，$c=3^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c>b>a$　（B）$c>a>b$　（C）$a>c>b$　（D）$a>b>c$

4.（2023·全国模拟·★★）已知 $a=3^{-2}$，$b=2^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_2 5$，则（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$c<a<b$　（C）$b<c<a$　（D）$a<c<b$

5.（2015·山东卷·★★）设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$a<c<b$　（C）$b<a<c$　（D）$b<c<a$

6.（2022·安徽模拟·★★★）已知$a=\log_3 4$，$b=\log_5 9$，$c=\dfrac{4}{3}$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

7.（2023·陕西榆林模拟·★★★）已知$a=\log_3\sqrt{2}$，$b=0.3^{0.5}$，$c=0.5^{-0.2}$，则（　　）

（A）$c<b<a$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<c<a$

8.（2022·浙江月考·★★★）已知$a=2^{\frac{4}{5}}$，$b=4^{\frac{2}{7}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

9.（2022·江苏南通模拟·★★★★）已知$a=\mathrm{e}-1$，$b=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\dfrac{3}{4}$，$c=4-\dfrac{1}{2\ln 2}$，则（　　）

（A）$b>c>a$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$